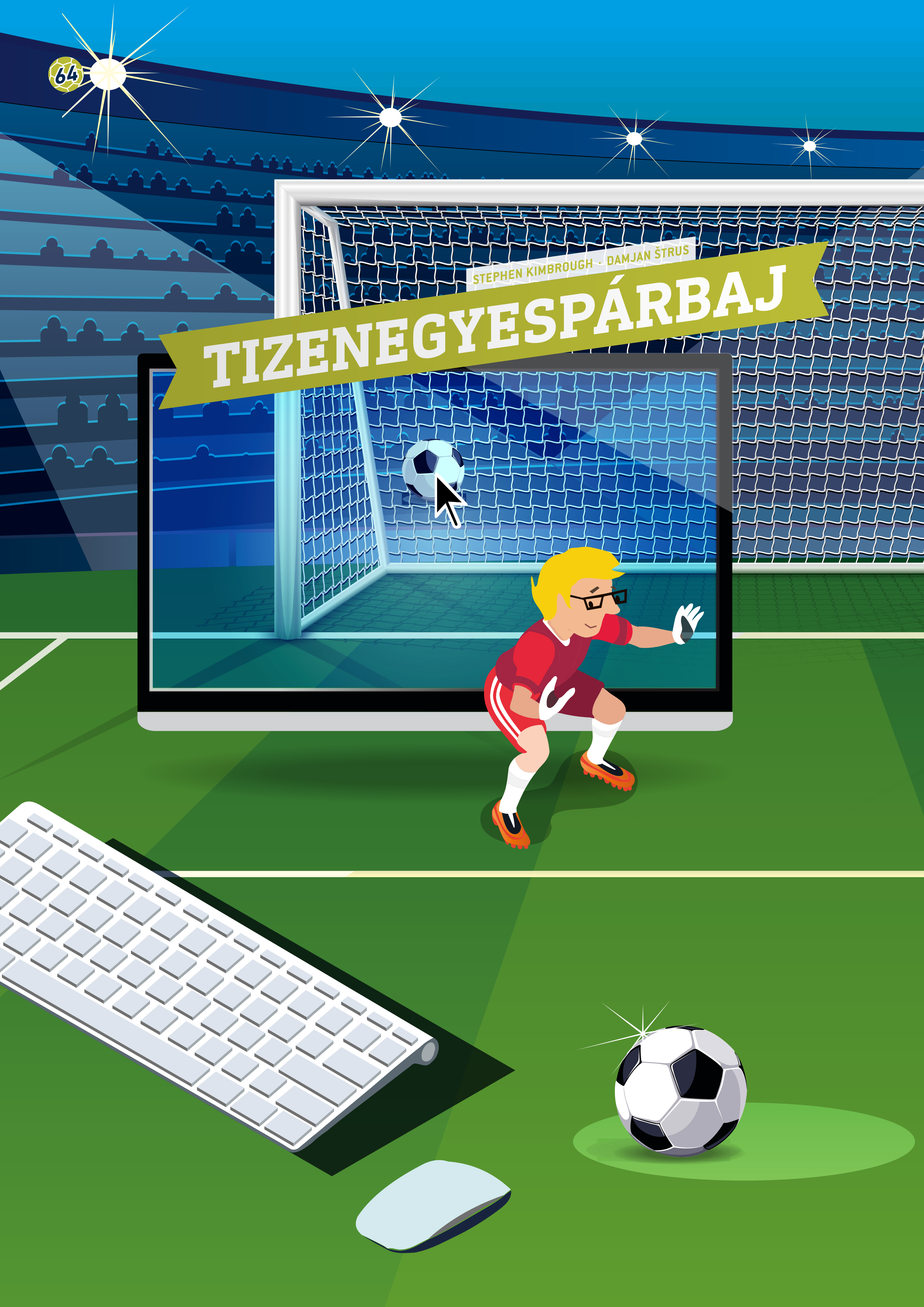
TIZENEGYESPÁRBAJ

STEPHEN KIMBROUGH · DAMJAN ŠTRUS



büntetőpárbaj, kombinatorika, játékelmélet
matematika, informatika, fizika
14–18 év

1 | ÖSSZEFOGLALÓ

A projekt során a tanulóknak ki kell számítaniuk a sikeres tizenegyesrúgás valószínűségét, figyelembe véve az összes belső és külső tényezőt (pl. geometria, reakcióidő, oldalválasztás).

A tanulóknak emellett meg kell határozniuk a tizenegyespárbajban részt vevő játékosok ideális sorrendjét, valamint olyan szabályt kell találniuk, amellyel „igazságosabbá" lehetne tenni a büntetőpárbajt.

2 | ELMÉLETI BEVEZETŐ

A tizenegyespárbajt az 1970-es években vezették be a FIFA világbajnokságok szabályzatába.

Akkor kerül sor rá, ha egy mérkőzés a hosszabbítás után is döntetlenre áll. Az új szabály bevezetése előtt a nyertest pénzfeldobással választották ki.

A büntetőpárbaj az egyik legizgalmasabb szituáció a mérkőzéseken.

Ebben a tanegységben azt vizsgáljuk, hogyan növelhetjük maximálisra egy adott csapat esélyeit.

A tanegység két részből áll. Az első részben a tanulók kiszámítják a gólszerzés valószínűségét egyetlen tizenegyes esetére. A második részben megismerik a tizenegyespárbaj optimalizálásának módját.

3 | A TANULÓK TEVÉKENYSÉGE

3 | 1 Egyetlen tizenegyesrúgás

A gólszerzés valószínűségének kiszámításához a tizenegyest két független mozgásra kell felosztanunk: a kapus és a tizenegyest rúgó játékos mozgására.

Először a kapushoz rendelünk valószínűségeket trigonometriai alapon.

A kapu szélessége 7,32 m, magassága pedig 2,44 m. A kapusok átlagos magassága kb. 2 m, széttárt karjainak távolsága pedig szintén 2 m. A tanulók ezt követően összehasonlíthatják a kapus által lefedett területet a kapu méretével. Ebből kiszámítható a védés valószínűsége.

A másik fontos tényező a kapus reakcióideje, valamint az, hogy mennyi időbe telik elérni a labdát.

A tanulók először megpróbálhatják megtippelni, hová érdemes lőni a labdát. A válasz: a kapu felső sarkába. Ezután trigonometriával kiszámíthatják a kérdéses pont távolságát. A labda mozgási ideje könnyen kiszámítható ($t = \frac{s}{v}$), azzal a feltételezéssel élve, hogy átlagosan 100 km/óra sebességgel halad.

A kapusnak ennyi ideje van, hogy reagáljon és a jó irányba vetődjön.

A tanulók saját reakcióidejüket egy vonalzó segítségével mérik meg, amelyet az egyik tanuló elejt, majd egy másik elkapja (lásd a 30. oldalt). A vonalzó által megtett távolság alapján a következőképpen lehet kiszámítani a reakcióidőt:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

g: nehézségi gyorsulás; $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
t: idő [s]
h: megtett távolság [m]

A reakcióidő kivonásával a kapusnak a megmaradt idő áll rendelkezésére, hogy megtegye a távolságot a labdáig. Az utóbbit már kiszámítottuk, így $v = \frac{x}{t}$ kezdősebesség szükséges a labda eléréséhez. A sportolók ugrási átlagsebessége kb. 16 km/óra.

A két sebesség összehasonlításával a tanulók beláthatják, hogy a kapusnak nincs esélye elérni a labdát. A következtetés: a kapus nem engedheti meg magának, hogy kivárja a reakcióidőt, azaz előre ki kell választania, melyik irányba vetődik.

A tanulók a kaput két félre osztják, majd kiszámítják a védés valószínűségét az egyik oldalon, a fenti módszer használatával. Ezután három harmadra osztják a kaput, és újra kiszámítják a valószínűséget.

A szabadrúgást végző játékosnak nem könnyű megbecsülni a valószínűségeket, de általában elmondható, hogy a ballábas játékosoknak a jobb sarokba, a jobblábasoknak pedig a bal sarokba érdemes célozni.

A tanulók 10, 20 vagy több, üres kapura végzett tizenegyesrúgás alapján adatokat gyűjthetnek, majd kiszámíthatják a lövéseik pontosságát.

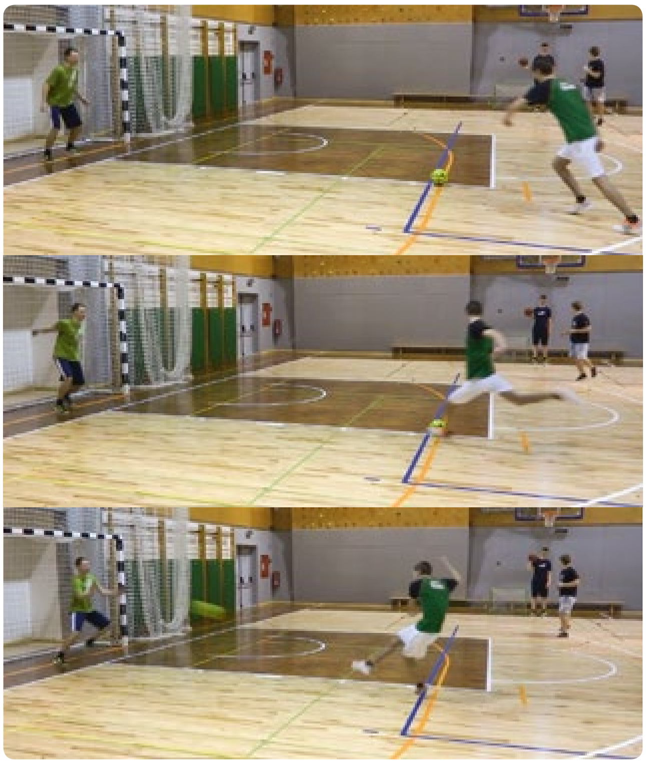
Ezután saját programot írhatnak (vagy felhasználhatják az [1] függelékben található forráskódot) a tizenegyesrúgás szimulációjához. Először a valószínűségi adatokat kell bevinni. A kapus és a tizenegyest rúgó játékos szempontjából a lövés iránya véletlenszerű lesz. Figyelembe véve a nagy számok törvényét, a tizenegyespárbajon a góllövés valószínűsége növelhető a lövések számának emelésével. Ennek alapján a tanulók feltehetik a kérdést, hogy a lövési stratégiák módosítása magasabb vagy alacsonyabb pontossághoz vezet-e. A programkódok között versenyt is lehet rendezni.

1. ÁBRA A büntetőrúgást végző perspektívája

2. ÁBRA A kapus perspektívája

3 | 2 Tizenegyespárbaj

A tizenegyespárbaj mindig ugyanolyan formában történik. Az egyes csapatokból kiválasztanak öt-öt játékost, akik fix sorrendben lövik a büntetőket. Pénzfeldobással döntik el, melyik csapat választhatja ki, ki kezdjen. A csapatok ezután felváltva lövik a büntetőket.



3. ÁBRA A büntetőrúgás szekvenciája

A tanulók kapnak egy játékoslistát, amelyen szerepel a játékosok átlagos góllövési valószínűsége. Kiválasztanak ötöt a játékosok közül, majd meghatározzák, milyen sorrendben lőjenek. Két tanulónak egymás ellen kell versenyeznie egy játékban, amely a Scratch 2-ben készült [2]. Ezután a tanulóknak bizonyítaniuk kell, hogy a kiválasztott sorrend a lehető legjobb. Mivel a góllövés átlagos valószínűsége

$p = \frac{(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)}{5}$, minden sorrend egyenlő.

A szimulációktól eltérően a valódi futballban az okoz problémát, hogy a tizenegyest elvégző játékosok a büntetőpárbaj előrehaladtával egyre nagyobb pszichés nyomásnak vannak kitéve. Ez az érték kb. 5 %-ra állítható. Az átlagos valószínűség egyenlete így a következő lesz:

$p = \frac{(p_1 + 0{,}95p_2 + 0{,}90p_3 + 0{,}85p_4 + 0{,}80p_5)}{5}$.

Mivel $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ lehetséges sorrend, a tanulóknak rá kell jönniük, hogyan lehet optimalizálni az eredményt. A legjobb módszer, ha a leggyengébb játékos lő először, és fokozatosan haladunk a jobb játékosok felé – de a megoldás megkeresését a tanulókra kell bízni.

Ennek tudatában a tanulók saját igényeiknek megfelelően módosíthatják a Scratch 2 programot.[2]

A következő változó a pszichológiai hatás, amellyel akkor kell számolni, ha a büntetőpárbajt kezdő csapat értékesíti a tizenegyest. Ez még nagyobb nyomást helyez a sorban következő játékosra.

Ezután a tanulóknak két egyenlő erősségű csapatot kell összehasonlítaniuk, módosítani a programot és több alkalommal futtatni a szimulációt. Arra a következtetésre fognak jutni, hogy a tizenegyespárbajt kezdő csapat esélye nagyobb a győzelemre.

A tanulóknak végül meg kell vitatniuk, milyen szabállyal lehetne igazságosabbá tenni a tizenegyespárbajt. Célszerű tesztelni a szabályt az említett programmal, hogy kiderüljön, elegendő-e öt lövés a várt eredmény eléréséhez.

A legigazságosabb sorrend az AB BA BA AB lenne az A. és B. csapat számára (mindkét csapatban 8–8 játékos játszik). Ezt Thue-Morse-sorozatnak is nevezzük. Meg kell változtatni a csapatok lövési sorrendjét, majd magát az új sorrendet is módosítani kell.

4 | KÖVETKEZTETÉS

A tanulók megtanulják, hogyan modellezzenek egy valós forgatókönyvet, és hogyan elemezzék matematikai módszerekkel. Azt is elsajátítják továbbá, hogyan használják programozási készségeiket a bonyolultabb helyzetekből eredő problémák megoldására, és hogyan írjanak saját forgatókönyvet a büntetőpárbajokhoz.

5 | EGYÜTTMŰKÖDÉSI LEHETŐSÉGEK

A tanulók osztályon belüli vagy iskolák közötti bajnokságot szervezhetnek, így kipróbálhatják, melyik büntetőpárbaj-stratégia működik a legjobban (lásd a *3.1* részt).

A tanulók azzal is kísérletezhetnek, hogyan „javíthatják” a szabályokat a kapu méretének és alakjának módosításával. Mi lenne a büntetőpárbaj eredménye, ha a kapu kerek vagy háromszög alakú lenne?

REFERENCIÁK

[1] www.science-on-stage.de/iStage3_materials
[2] https://scratch.mit.edu/scratch2download/