52

ANDERS FLORÉN · PHILIPPE JEANJACQUOT · DIONYSIS KONSTANTINOU · ANDREAS MEIER · CORINA TOMA · ZBIGNIEW TRZMIEL

SKRUVAD FYSIK

Magnuseffekten, fluiddynamik
fysik, matematik
16–19 år

1 | SAMMANFATTNING

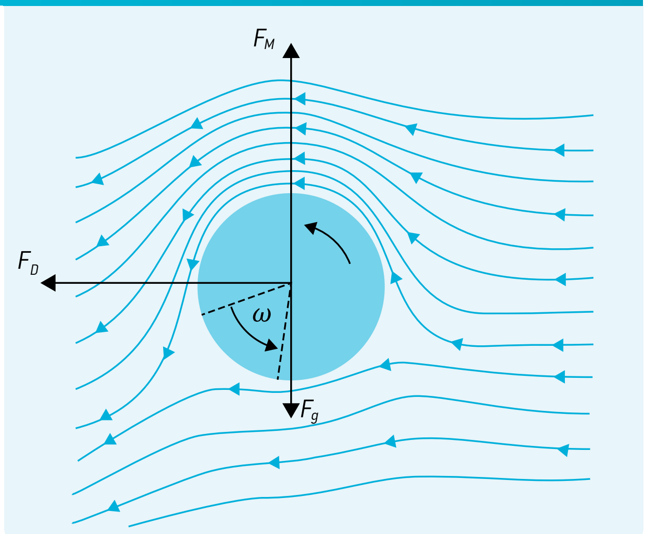
En roterande boll som rör sig genom luften kommer att böja av på grund av Magnuseffekten, en kraft som verkar vinkelrätt mot bollens riktning och rotationsaxel. Här presenterar vi några praktiska experiment, simuleringar och metoder för att beräkna bollens bana.

2 | PRESENTATION AV VIKTIGA BEGREPP

I juni 1997 gjorde Roberto Carlos ett berömt mål med en 35 m frispark som fortfarande förbryllar åskådaren. [1] Hur kan bollen bete sig på detta sätt, först färdas i en riktning och sedan magiskt böja av mot målet? Svaret är att bollen snurrar i luften och utsätts för Magnuskraften. Om du vill se en introduktion till frisparkar av mästaren Roberto själv rekommenderar vi varmt hans video på UEFA:s hemsida Training Ground. [2] Om du vill ha en introduktion till Magnuskraften kan du fortsätta läsa.

För att analysera banan för en boll måste vi beakta tre krafter som verkar på bollen: gravitationen F_g, Magnuskraften F_M och motståndskraften F_D.

FIG. 1 Krafter [3]



Tyngdkraften ges helt enkelt av Newtons andra lag, $F_g = mg$, där m bollens massa och g är tyngdaccelerationen.

Magnuskraften F_M uppträder på grund av skillnader i tryck vid bollens motstående sidor. Ändringarna i tryck kan beskrivas med Bernoulliprincipen. För en punkt som rör sig genom ett medium med hastigheten v är det totala trycket p lika med det omgivande statiska trycket p_0 plus det dynamiska trycket q **(EKV. 1)**, där ρ är mediets densitet, i vårt fall densiteten hos luft. Men när en boll eller cylinder med radien R roterar (med vinkelhastigheten ω i radianer per sekund), utsätts en punkt på ytan av ena sidan av bollen för ett högre luftflöde $(v + \omega R)$ än motsvarande punkt på den andra sidan $(v - \omega R)$. Därigenom kan vi härleda tryckskillnaden $\Delta p = 2\rho\omega vR$ från **EKV. 1**.

$$p = q + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 \qquad \textbf{(EKV. 1)}$$

$$\Delta p = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + p_0\right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + p_0\right)$$

$$= \frac{\rho\left((v + \omega R)^2 - (v - \omega R)^2\right)}{2} = 2\,\rho\omega vR$$

$$F_M = \Delta pA = (2\rho\omega vR)A$$

För en cylinder: $F_M = 4\rho\omega vR^2h$. **(EKV. 2)**

För en sfär: $F_M = 2\rho\omega v\pi R^3$. **(EKV. 3)**

Trycket som verkar på ytan utgör F_M. Utan att gå alltför djupt in i matematiken bakom behöver vi bara betrakta de krafter som verkar vinkelrätt mot fluidflödet. Alla krafter som verkar i en annan riktning än vinkelrätt mot flödet kommer att upphävas av en annan motstående kraft på grund av symmetri. Därför betraktar vi bara föremålets effektiva tvärsnittsarea A. För en boll är A helt enkelt en cirkel med radien R (används i **EKV. 3**). För en cylinder är A en rektangel med höjden $2R$ och bredden h (används i **EKV. 2**). Beträffande vektorer är $\vec{F}_M$ proportionell mot vektorprodukten av riktningshastigheten och vinkelhastigheten.

Slutligen måste vi bestämma motståndskraften F_D. Motstånd är komplicerat eftersom luftflödet kan vara laminärt eller turbulent, till stor del beroende på föremålets form och egenskaperna hos fluiden som föremålet rör sig i. För våra försök räcker det att anta att flödet är laminärt (som i **FIG. 1**) och använda den vanliga motståndskraftsekvationen där kraften har motsatt riktning gentemot v och är proportionell mot hastigheten: $F_D = \beta v$. β är en konstant som beror på egenskaperna hos fluiden måtten hos föremålet. För en fotboll i luft är $\beta = 0{,}142\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ [4].

3 | VAD ELEVERNA GÖR

Här presenterar vi tre olika alternativ för att demonstrera Magnuseffekten. Alla dessa experiment kan utföras som enkla demonstrationer, men du kan också filma experimenten och använda våra modeller för att analysera banorna. I så fall bör du använda en stationär kamera placerad på samma höjd som föremålen och vinkelrätt mot banan, samt minst några meter bort för att minimera vinkeldistorsion. Filmen kan sedan analyseras med ett rörelseanalysprogram. Vi rekommenderar Tracker [5]. Detaljerade anvisningar om hur du använder Tracker finns i vår första iStage-bok [6]. Det finns en utmärkt app, VidAnalysis [7], som registrerar banan och utför analysen direkt på en Androidenhet **(FIG. 2C)**. Registrerade data kan också exporteras för ytterligare analys. Här använder vi gratisprogramvaran GeoGebra [8].

FIG. 2 Cylinder och lutande plan

3 | 1 Försök med cylindrar

Tillverka olika cylindrar av A4- eller A3-papper och lim. Ställ upp ett lutande plan och låt cylindrarna rulla nedför planet för att åstadkomma ett fritt fall med rotation **(FIG. 2A)**.

Eleverna kan undersöka vad som händer om de ändrar lutningen på planet eller cylinderns radie eller höjd. Eleverna kan experimentellt bestämma vilka parametrar som synbarligen ger en större effekt och korrelera dem till **EKV. 2**, eller så kan de gå vidare genom att extrahera data och utföra dataanalys (modell II) enligt beskrivningen längre fram.

Magnuseffekten i vatten **(FIG. 3)** är ännu mer imponerande tack vare den högre densiteten hos mediet. Cylindern måste ha en

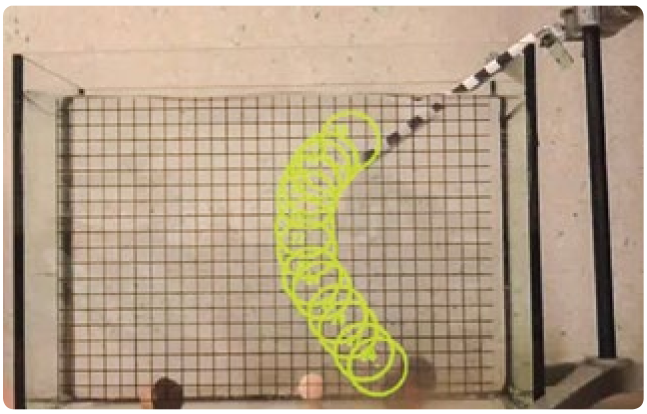


FIG. 3 Magnuseffekten i vatten

högre densitet än vatten och en grov yta för att öka friktionen. Vi använde en fast teflonstav med kardborrband fastlimmat på ytan. För att justera cylinderns vikt kan du limma fast mynt i ändarna på cylindern.

En ännu mer spektakulär men svårare uppställning är att limma eller tejpa ihop bottnarna på två frigolitmuggar så att du får en cylinder med en midja på mitten.[9] Rulla ett snöre runt midjan och släpp cylindern i luften genom att rycka i snöret (**FIG. 4**. Det finns också en länk till en film på vår GeoGebra-sida[10]). Det kräver lite övning, men resultatet är spektakulärt. Experimentet är inte lika reproducerbart som de andra cylinderexperimenten eftersom banan beror på vinkeln och hur hårt du rycker i snöret. De lyckade banorna kan dock ändå analyseras var för sig. I **FIG. 4** går de flygande muggarna in i en cirkulär rörelse. Om Magnuseffekten är avsevärt större än tyngdkraften uppträder F_M som en centripetalkraft. Detta användbara antagande kommer att användas senare under dataanalysen.

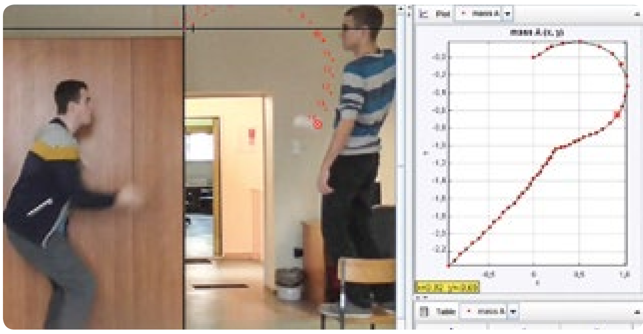


FIG. 4 Flygande muggar

3 | 2 Dataanalys

Vi har utvecklat olika matematiska modeller för att analysera banorna. Dessa modeller finns på internet, på vår GeoGebra-sida för iStage 3[10]. Vi rekommenderar starkt att du tittar på dem innan du fortsätter läsa denna text. De körs direkt i din webbläsare, du klickar bara på länken.

I alla beräkningar har vi antagit att rotationen är konstant under flykten i luften. Vi gör sedan två förenklade modeller baserade på olika antaganden:

Modell I: Som i den frågeteckenformade banan med de flygande pappersmuggarna **(FIG. 4)** kommer F_M att uppträda som en centripetalkraft och föremålets beräknade bana kommer att vara en cirkel med radien r. Detta antagande är också rimligt i en straffsparkssituation där den bollens totala hastighet förblir ungefär densamma. En del av energin går förlorad på grund av turbulens. Därför behöver vi införa en konstant C_s för att beskriva denna förlust.

Då har vi följande:

$$F_M = C_s 2\rho\omega vRA = \frac{mv^2}{r}.$$

För en sfär: $r = \dfrac{mv}{2C_s\pi\rho\omega R^3}$. **(EKV. 4)**

För en cylinder: $r = \dfrac{mv}{4C_s\rho\omega h R^2}$. **(EKV. 5)**

Du kan se spåret från **FIG. 4** i vår GeoGebra-modell (flygande muggar) samt ändra cirkelns centrum och C_s. Prova olika parametrar för att få den bästa kurvanpassningen. Modellen kommer att beräkna r från **EKV. 5**. För våra data fås den bästa anpassningen med $C_s = 0{,}86$.

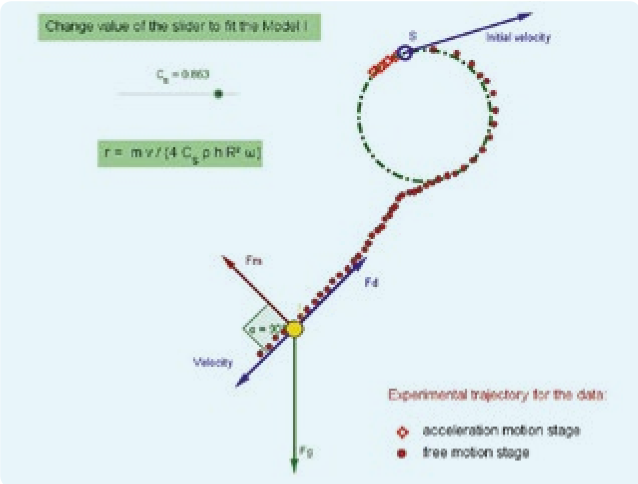


FIG. 5 Analys av flygande muggar

Modell II: För att förenkla beräkningarna för försöket med papperscylindern **(FIG. 2)** kan eleverna anta att Magnuseffekten huvudsakligen drar vinkelrätt mot rörelsens initiala riktning och att cylindrarna har uppnått maximal hastighet när de faller. Med dessa antagande tar F_D och F_g ut varandra och Magnuseffekten kan betraktas som acceleration a i y-riktningen så att den beräknade banan blir en parabol:

$$y = \frac{a}{2v^2}x^2 \implies y = C_s\frac{\rho\omega RA}{mv}x^2.$$

För en sfär: $y = C_s\dfrac{\pi\rho\omega R^3}{mv}x^2$. **(EKV. 6)**

För en cylinder: $y = C_s\dfrac{2\rho\omega h R^2}{mv}x^2$. **(EKV. 7)**

Detta är en förenkling, men den ger oss ett liknande värde för C_s som i vår andra modell.

På vår GeoGebra-sida **(FIG. 6)** har vi iscensatt ett återskapande av Roberto Carlos berömda frispark. Du kan ändra nästan alla parametrar för att ändra uppställningen (avstånd, vinkel, målburens storlek, C_s, hastighet, rotation, fyrmannamurens position osv.). Analysen visar den beräknade banan för modell I och II, denna gång med hjälp av **EKV. 4** och **EKV. 6** eftersom vi betraktar en boll i stället för en cylinder. Utmana dina elever att hitta de bästa värdena för en given uppställning, eller be dem hitta de villkor där modellerna ger olika banor och be dem förklara varför. (Du kommer att se att modellerna skiljer sig när bollen får en mycket låg hastighet och en kraftig rotation).

3 | 3 Simuleringar

2D-simulering: Efter några praktiska försök kan eleverna simulera Magnuseffekten. Ladda ner Java-programmet [11]. I denna simulering kan eleverna modifiera den initiala hastigheten, vinkeln, motståndskoefficienten och vinkelfrekvensen. Rotationsriktningen och krafterna som verkar på bollen visas i **FIG. 1**. I **FIG. 7** visar vi tre exempel på banor vid 30° med frekvensen 0, 5 respektive 10 $\frac{\text{rev}}{\text{s}}$. Du kan se att värdena på x_{max} och y_{max} ökar om frekvensen ökar.

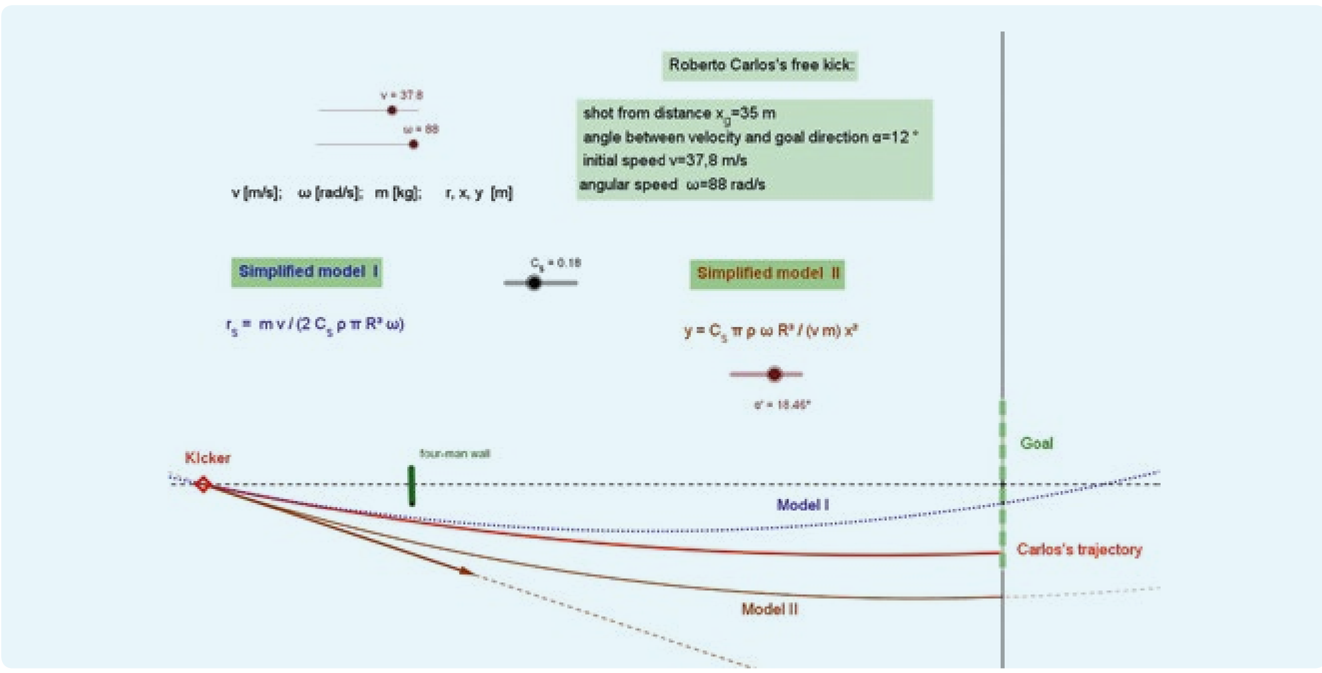


FIG. 6 Analys av frispark

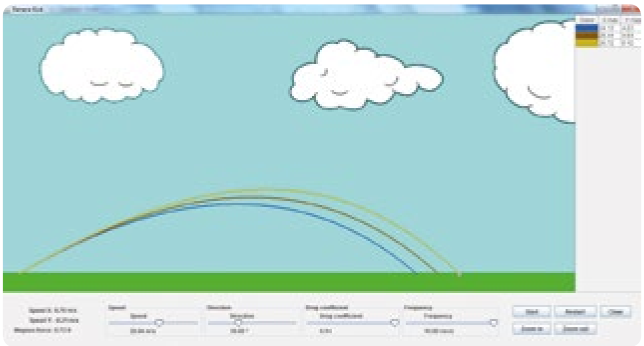


FIG. 7 2D-simulering

3D-simulering: Här har vi på nytt återskapat banan för Roberto Carlos frispark **(FIG. 8)**. Nu kan du prova själv genom att ladda ner respektive Javaprogram [11]. Senare kan du prova en annan version [11] utan spark, men genom att fritt ändra parametrarna för att se vilken effekt de har på banan.

I 3D blir saker och ting snabbt mer komplexa. I den tvådimensionella modellen kan bollen bara ha överskruv eller underskruv, vilket betyder att banan och Magnuskraften bara verkar i samma plan. I den tredimensionella modellen kommer Magnuseffekten att böja bollens bana, men vinkelrörelsemängden kommer alltid att bevaras eftersom bollen beter sig som ett gyroskop. Därför kommer vinkeln mellan v och ω alltid att vara olika vid olika punkter längs banan, vilket gör att bollen får en mer komplex bana. Till skillnad från GeoGebra-beräkningarna gör detta program helt enkelt en numerisk beräkning av alla krafter i varje bildruta baserat på värdena i den föregående bildrutan.

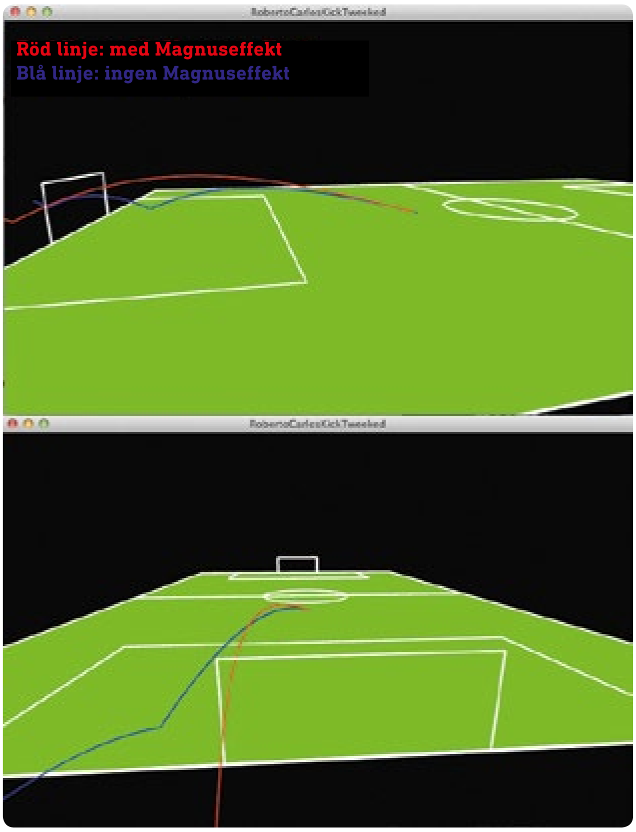


FIG. 8 3D-simulering

Programmet är skrivet i Processing [12] som är en förenklad version av Java.

4 | SLUTSATS

Bollens bana på en fotbollsplan är komplex och beror på en hel rad olika faktorer. För att studera detta i klassrummet måste eleverna dela upp det i hanterbara komponenter med hjälp av modeller och förenklingar. Dessa experiment, modeller och simuleringar ger en inblick i vad vi kan sluta oss till genom att arbeta med en vetenskaplig metod: Om vi antar att matchen spelas under vatten eller att fotbollen kan bytas ut mot två pappersmuggar kommer vi mycket nära förklaringen till hur Roberto Carlos lyckas skruva bollen.

5 | ALTERNATIV FÖR SAMARBETE

På vår GeoGebra-plattform för iStage 3 [10] finns information om hur du skaffar en kopia av våra GeoGebra-filer och hur du använder dem. Vi föreslår en utmaning: Åstadkom största möjliga Magnuseffekt för försöket med de flygande pappersmuggarna. Det motsvarar att hitta det högsta värdet för C_s, så nära 1 som möjligt. Du kan dela med dig av analys, resultat och modeller [11].

REFERENSER:

[1] www.theguardian.com/football/2015/may/18/roberto-carloss-free-kick-against-france-recreated-sensible-soccer-style (08/03/2016)

[2] www.uefa.com/trainingground/skills/video/videoid%3D761187.html (08/03/2016)

[3] Ursprungsbilden för **FIG. 1** erhölls från https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus_effect.svg (08/03/2016)

[4] The Science of Soccer; John Wesson. CRC press, 2002. ISBN 978-0750308137

[5] www.physlets.org/tracker

[6] iStage: Teaching Materials for ICT in Natural Sciences, avsnittet ”From Bicycle to Space”, sida 45–52, www.science-on-stage.de/iStage1_downloads

[7] VidAnalysis-appen https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=en (2016-03-08)

[8] www.geogebra.org/

[9] Ett liknande försök har beskrivits av Laura Howes (Science in School, nummer 35, 2016, www.scienceinschool.org/content/sports-spin).

[10] www.geogebra.org/science+on+stage

[11] www.science-on-stage.de/iStage3_materials

[12] https://processing.org

IMPRINT

TAKEN FROM
iStage 3 - Football in Science Teaching
available in Czech, English, French, German,
Hungarian, Polish, Spanish, Swedish
www.science-on-stage.eu/istage3

PUBLISHED BY
Science on Stage Deutschland e.V.
Poststraße 4/5
10178 Berlin · Germany

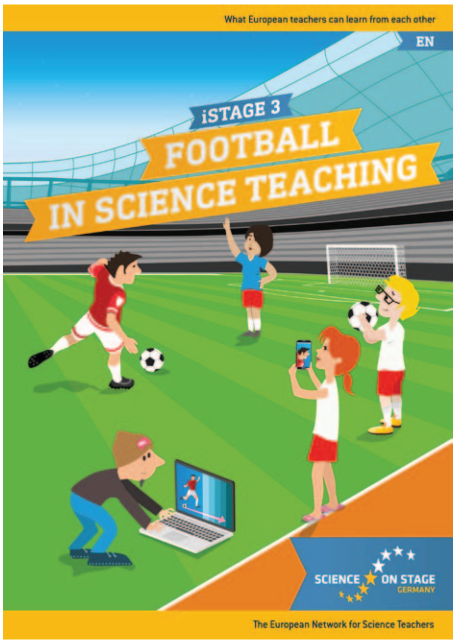
REVISION AND TRANSLATION
TransForm Gesellschaft für Sprachen- und Mediendienste mbH
www.transformcologne.de

CREDITS
The authors have checked all aspects of copyright for the images and texts used in this publication to the best of their knowledge.

DESIGN
WEBERSUPIRAN.berlin

ILLUSTRATION
Tricom Kommunikation und Verlag GmbH
www.tricom-agentur.de

PLEASE ORDER FROM
www.science-on-stage.de
info@science-on-stage.de



SCIENCE ON STAGE – THE EUROPEAN NETWORK FOR SCIENCE TEACHERS

... is a network of and for science, technology, engineering and mathematics (STEM) teachers of all school levels.
... provides a European platform for the exchange of teaching ideas.
... highlights the importance of science and technology in schools and among the public.

The main supporter of Science on Stage is the Federation of German Employers' Associations in the Metal and Electrical Engineering Industries (GESAMTMETALL) with its initiative think ING.

Join in - find your country on
WWW.SCIENCE-ON-STAGE.EU
www.facebook.com/scienceonstageeurope
www.twitter.com/ScienceOnStage

Subscribe for our newsletter:
www.science-on-stage.eu/newsletter

SCIENCE ON STAGE GERMANY

MAIN SUPPORTER OF SCIENCE ON STAGE GERMANY
think ING.
Die Initiative für Ingenieurnachwuchs

Proudly supported by
SAP