ANDERS FLORÉN · PHILIPPE JEANJACQUOT · DIONYSIS KONSTANTINOU · ANDREAS MEIER · CORINA TOMA · ZBIGNIEW TRZMIEL

PO(D)KRĘCONA FIZYKA

efekt Magnusa, dynamika płynów
fizyka, matematyka
16–19 lat

1 | STRESZCZENIE

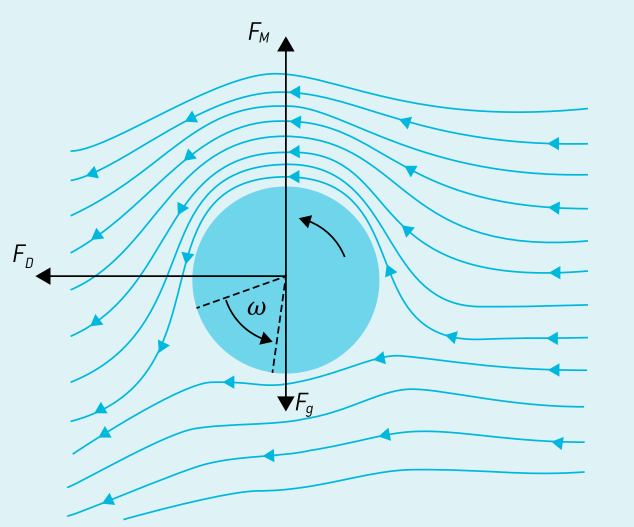
Obracająca się piłka poruszająca się w powietrzu będzie zakręcać ze względu na efekt Magnusa, czyli siłę działającą prostopadle do kierunku i osi obrotu piłki. W tej jednostce prezentujemy kilka praktycznych doświadczeń, symulacji i metod w celu obliczenia jej trajektorii.

2 | WPROWADZENIE KONCEPCYJNE

W czerwcu 1997 roku Roberto Carlos strzelił słynnego gola z rzutu wolnego z odległości 35 m od bramki, który wciąż zdumiewa oglądających ten strzał [1]. Jak piłka może zachowywać się w ten sposób, lecąc w jednym kierunku zaczyna magicznie zakręcać w kierunku bramki? Odpowiedź brzmi: piłka kręci się w powietrzu i podlega sile Magnusa. Jeśli chcecie obejrzeć wprowadzenie do rzutów wolnych w wykonaniu samego mistrza Roberto, gorąco zachęcamy do obejrzenia jego filmu na stronie UEFA Training Ground [2]. Jeśli chcecie dowiedzieć się kilku rzeczy na temat siły Magnusa, czytajcie dalej.

Aby przeanalizować trajektorię piłki, musimy ocenić trzy siły działające na nią: grawitacji F_g, Magnusa F_M i opór F_D.

RYS. 1 Siły [3]



Siła grawitacji jest opisana drugą zasadą dynamiki Newtona, $F_g = mg$, gdzie m to masa piłki, a g to przyspieszenie ziemskie.

Efekt Magnusa F_M występuje w wyniku różnic ciśnień po obu stronach piłki. Zmiany w ciśnieniu można opisać, używając równania Bernoulliego. Dla punktu na powierzchni poruszającego się względem otoczenia z prędkością v, całkowite ciśnienie p jest równe otaczającemu ciśnieniu statycznemu p_0 i ciśnieniu dynamicznemu q (**RÓWN. 1**), gdzie ρ to gęstość ośrodka (w naszym przypadku będzie to gęstość powietrza). Jednak kiedy piłka lub cylinder o promieniu R obraca się (z prędkością kątową ω w radianach na sekundę), punkt na powierzchni po jednej stronie piłki poddawany jest działaniu większego przepływu powietrza $(v + \omega R)$ niż punkt po przeciwnej stronie $(v - \omega R)$. Stąd możemy obliczyć różnicę w ciśnieniu $\Delta p = 2\rho\omega vR$ z **RÓWN. 1**.

$$p = q + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 \qquad \textbf{(RÓWN. 1)}$$

$$\Delta p = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + p_0\right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + p_0\right)$$

$$= \frac{\rho\left((v+\omega R)^2 - (v-\omega R)^2\right)}{2} = 2\,\rho\omega vR$$

$$F_M = \Delta pA = (2\rho\omega vR)A$$

Dla walca: $F_M = 4\rho\omega vR^2h$. **(RÓWN. 2)**

Dla kuli: $F_M = 2\rho\omega v\pi R^3$. **(RÓWN. 3)**

Siła Magnusa zależy zatem od różnicy ciśnień i powierzchni pola przekroju ciała. Bez zagłębiania się w dokładne obliczenia matematyczne, zajmiemy się jedynie siłami działającymi prostopadle względem przepływu cieczy. Każda siła działająca w kierunku innym niż prostopadle do przepływu będzie zrównoważona przez inną przeciwną siłę w wyniku symetrii. Dlatego zajmujemy się tylko użyteczną powierzchnią przekroju A przedmiotu. W przypadku piłki A będzie po prostu kołem o promieniu R (użyty w **RÓWN. 3**); w przypadku walca A będzie prostokątem o wysokości $2R$ i szerokości h (użyty w **RÓWN. 2**). Pod względem wektorowym $\vec{F}_M$ jest proporcjonalna do iloczynu wektorowego prędkości kierunkowej i kątowej.

Ostatecznie należy oszacować siłę oporu F_D. Opór jest skomplikowany, ponieważ przepływ powietrza może być warstwowy lub zaburzony, zależąc w dużej mierze od kształtu przedmiotu i natury płynu, w którym się porusza. Do celów naszych doświadczeń wystarczy przyjąć, że przepływ ten jest warstwowy (jak na **RYS. 1**) i użyjemy standardowego równania na opór, gdzie siła jest skierowana w przeciwnym kierunku do v i proporcjonalna do prędkości: $F_D = \beta v$. β to stała, która zależy od właściwości cieczy i wymiarów przedmiotu, w przypadku piłki nożnej i powietrza jest to $\beta = 0{,}142\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ [4].

3 | ZADANIE UCZNIÓW

Prezentujemy trzy różne przykłady zademonstrowania efektu Magnusa. Wszystkie te doświadczenia można przeprowadzić jako proste pokazy, ale można je również sfilmować i użyć naszych modeli do analizy trajektorii. W takim przypadku należy zwrócić uwagę, aby nagrywać film kamerą stacjonarną na tej samej wysokości co przedmioty i prostopadle do trajektorii oraz przynajmniej z odległości kilku metrów, aby zminimalizować zniekształcenia kątowe. Film można następnie przeanalizować za pomocą programu do wideopomiarów. Polecamy program Tracker [5]. Szczegółowe instrukcje dotyczące używania narzędzia Tracker znajdują się w naszej pierwszej broszurze iStage [6]. Istnieje świetna aplikacja,

RYS 2 Cylinder i pochylnia

VidAnalysis [7], która nagrywa trajektorię i przeprowadza analizę bezpośrednio w urządzeniu z systemem Android **(RYS. 2C)**. Dane można także wyeksportować do dalszej analizy; tutaj używamy darmowego oprogramowania GeoGebra [8].

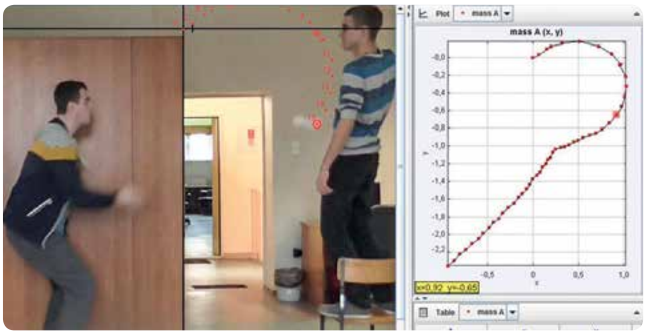
3 | 1 Doświadczenia z cylindrem

Wykonajcie różne cylindry, używając arkuszy papieru A4 lub A3 i kleju. Zamontujcie tablicę pod kątem i puśćcie cylindry w dół po nachyleniu, aby wprowadzić je w swobodny ruch z obrotem **(RYS. 2A)**.

Uczniowie mogą sprawdzić, co się stanie, jeśli zmienią nachylenie deski, promień lub wysokość cylindra. Uczniowie mogą doświadczalnie określić parametry, które będą widocznie zapewniać większy efekt i powiązać go z **RÓWN. 2** lub mogą nawet wyekstrahować dane i przeprowadzić ich analizę (Model II) zgodnie z późniejszym opisem.

Efekt Magnusa w wodzie **(RYS. 3)** jest jeszcze większy ze względu na większą gęstość nośnika. Cylinder musi mieć większą gęstość niż woda, a szorstka powierzchnia zwiększa tarcie. Użyliśmy litego pręta teflonowego z rzepem przylepionym do powierzchni. Aby zwiększyć ciężar cylindra, można przykleić monety na jego końcach.

Jeszcze bardziej widowiskowa, ale trudniejsza konfiguracja zakłada sklejenie klejem lub taśmą dwóch podstawek styropianowych kubków, tak aby mieć cylinder z przewężeniem na środku.[9] Następnie należy owinąć sznurek wokół przewężenia i puścić cylinder w powietrze, szarpiąc za sznurek (**RYS. 4**; jest również link do filmu na naszej stronie GeoGebra [10]). Wykonanie tego wymaga pewnej wprawy, ale efekt jest niesamowity. To doświadczenie jest mniej odtwarzalne w porównaniu z innymi doświadczeniami z cylindrami, ponieważ trajektoria zależy od kąta oraz siły szarpnięcia sznurka. Tym niemniej jednak możecie przeanalizować udane trajektorie oddzielnie. Na **RYS. 4** latające kubki wykonują ruch kolisty. Jeśli efekt Magnusa jest znacząco większy niż przyciąganie ziemskie, F_M zachowuje się jak siła dośrodkowa. Tego przydatnego założenia użyjemy później podczas analizy danych.



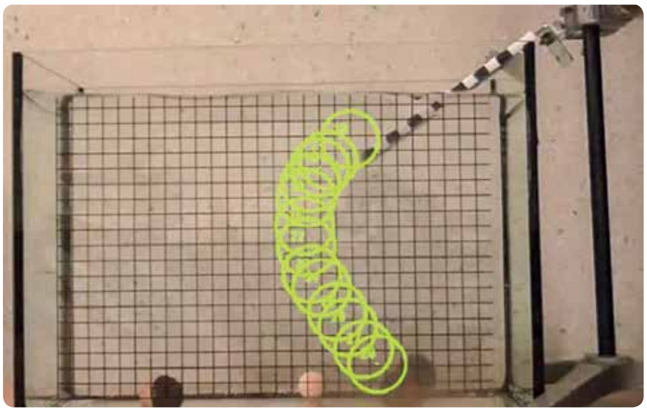
RYS. 4 Latające kubki

3 | 2 Analiza danych

Opracowaliśmy różne modele matematyczne do analizy trajektorii. Modele te są dostępne bezpośrednio na naszej stronie iStage 3 GeoGebra [10]. Gorąco zachęcamy, aby otworzyć te modele przed dalszą lekturą tego tekstu. Otworzą się bezpośrednio w przeglądarce – wystarczy kliknąć link.

We wszystkich obliczeniach przyjęliśmy, że ruch obrotowy jest stały podczas lotu. Następnie przygotowaliśmy dwa uproszczone modele oparte na różnych założeniach:

Model I: Podobnie jak w przypadku trajektorii latających kubków (w kształcie znaku zapytania) **(RYS. 4)**, F_M będzie zachowywać się jak siła dośrodkowa, a obliczona trajektoria przedmiotu będzie okręgiem o promieniu r. To założenie jest również uzasadnione w przypadku rzutu karnego, gdzie całkowita prędkość piłki pozostaje mniej więcej taka sama. Część energii zostaje utracona ze względu na turbulencje, stąd musimy wprowadzić stałą C_s, aby opisać tę stratę.



RYS. 3 Efekt Magnusa w wodzie

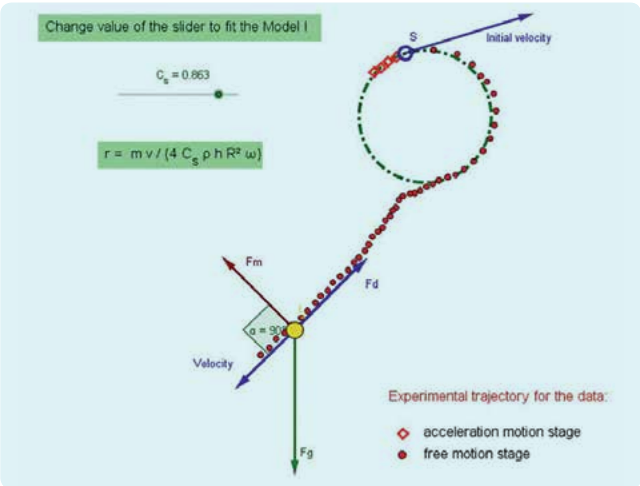
Tak więc mamy:

$$F_M = C_s 2\rho\omega vRA = \frac{mv^2}{r}.$$

Dla kuli: $r = \dfrac{mv}{2C_s\pi\rho\omega R^3}$. **(RÓWN. 4)**

Dla cylindra: $r = \dfrac{mv}{4C_s\rho\omega hR^2}$. **(RÓWN. 5)**

Widać ślad na **RYS. 4** w naszym modelu GeoGebra (latające kubki) i zmianę środka okręgu i C_s. Pobawcie się parametrami, aby znaleźć jak najlepsze dopasowanie; model pozwoli obliczyć r z **RÓWN. 5**. W przypadku naszych danych najlepszym dopasowaniem jest $C_s = 0{,}86$.



RYS. 5 Analiza latających kubków

Model II: Aby uprościć obliczenia do celów doświadczenia z cylindrem papierowym **(RYS. 2)**, uczniowie mogą przyjąć, że efekt Magnusa występuje głównie prostopadle do pierwotnego kierunku ruchu i że cylindry osiągnęły maksymalną prędkość w momencie spadania. Przy takich założeniach F_D i F_g się równoważą, a efekt Magnusa można uznać za przyspieszenie a w kierunku y, stąd obliczona trajektoria będzie parabolą:

$$y = \frac{a}{2v^2}x^2 \implies y = C_s\frac{\rho\omega RA}{mv}x^2.$$

Dla kuli: $y = C_s\dfrac{\pi\rho\omega R^3}{mv}x^2$. **(RÓWN. 6)**

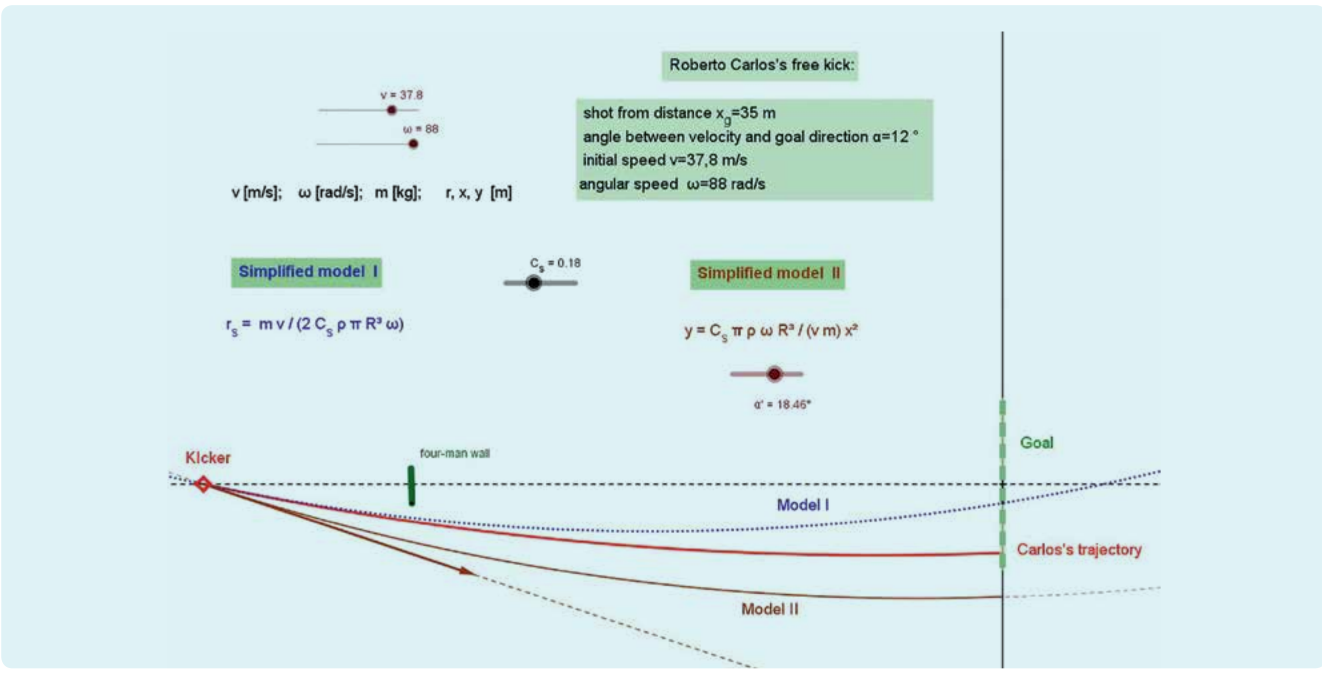
Dla cylindra: $y = C_s\dfrac{2\rho\omega hR^2}{mv}x^2$. **(RÓWN. 7)**

Jest to uproszczenie, jednak zapewni nam podobną wartość C_s jak w naszym drugim modelu.

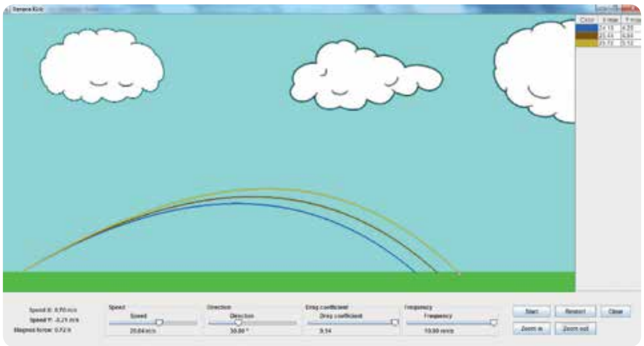
Na naszej stronie GeoGebra **(RYS. 6)** odtworzyliśmy słynny rzut wolny Roberto Carlosa. Możecie pobawić się prawie wszystkimi parametrami, aby zmieniać konfigurację (odległość, kąt, wymiary bramki, C_s, prędkość, obrót, ustawienie czteroosobowego muru itp.). Analiza pokaże obliczoną trajektorię w obu modelach – I i II – tym razem przy użyciu **RÓWN. 4** i **RÓWN. 6**, ponieważ teraz analizujemy piłkę, a nie cylinder. Nauczyciel powinien zachęcić uczniów, aby poszukali najlepszych wartości dla danego ustawienia lub poprosić ich, aby poszukali warunków, w których obliczenia trajektorii na podstawie obu modeli będą inne i wyjaśnili dlaczego (okaże się, że wyniki będą się różnić przy piłce poruszającej się z bardzo małą prędkością i szybko obracającej się).

1|1 Symulacje

Symulacja 2D: Po praktycznych doświadczeniach uczniowie mogą zasymulować efekt Magnusa. Pobierzcie program Java[11]. W ramach tej symulacji uczniowie mogą zmieniać pierwotną prędkość, kąt, współczynnik oporu oraz częstotliwość kątową. Ruch



RYS. 6 Analiza rzutu wolnego

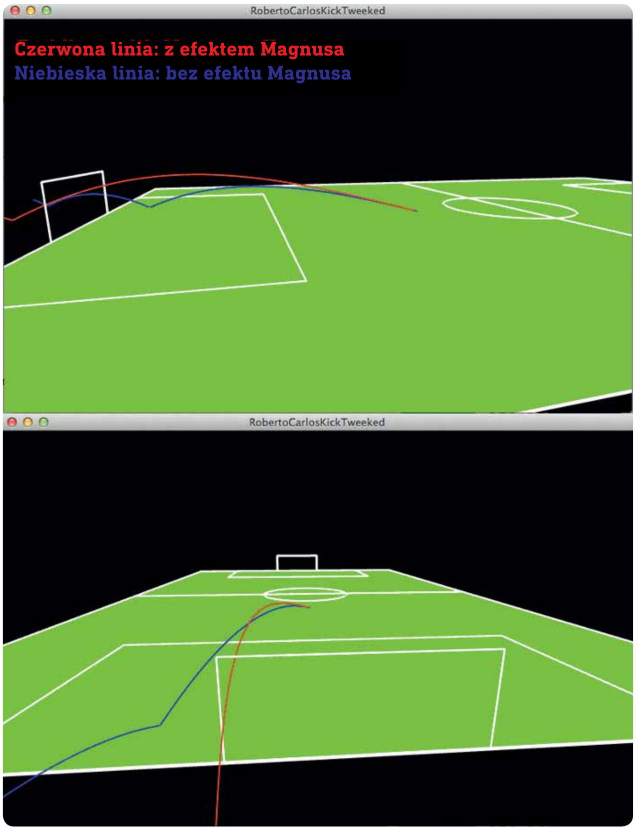


RYS. 7 Symulacja 2D

obrotowy i siły oddziałujące na piłkę są pokazane na **RYS. 1**. Na **RYS. 7** pokazujemy trzy przykłady trajektorii pod kątem 30° przy częstotliwości 0, następnie 5 i $10\frac{obr.}{s}$. Widać, że wartości x_{max} i y_{max} rosną wraz ze wzrostem częstotliwości.

Symulacja 3D: Po raz kolejny odtworzyliśmy trajektorię rzutu wolnego Roberto Carlosa (**RYS. 8**). Teraz możecie spróbować swoich sił, pobierając odpowiedni program Java [11]. Później możecie wypróbować inną wersję [11] bez wykopu, ale możecie zmienić parametry dowolnie, aby sprawdzić, jaki wpływ będą mieć na trajektorię.

W symulacji 3D sytuacja nagle zdecydowanie się zmienia. W modelu dwuwymiarowym piłka może mieć tylko rotację górną lub dolną, tak więc trajektoria i siła Magnusa będzie zawsze oddziaływała na tej samej płaszczyźnie. W trójwymiarowym modelu siła Magnusa będzie zakrzywiać trajektorię piłki, ale moment pędu ruchu obrotowego będzie zawsze zachowany, ponieważ piłka będzie zachowywać się jak żyroskop. Tak więc kąt pomiędzy v i ω będzie inny w różnych punktach trajektorii, co zdecyduje ją skomplikuje. W przeciwieństwie do obliczeń w programie GeoGebra ten program po prostu oblicza wszystkie siły numerycznie w każdej klatce na podstawie wartości w poprzedniej klatce. Program jest napisany w Processing [12], uproszczonej wersji Javy.



RYS. 8 Symulacja 3D

4 | WNIOSEK

Na boisku do piłki nożnej trajektoria piłki jest złożona i zależy od wielu różnych czynników. Aby ją przeanalizować w klasie, uczniowie muszą podzielić ją na części, którymi będą umieli się zająć, przy użyciu modeli i uproszczeń. Te doświadczenia, modele i symulacje dają wgląd w to, co można wywnioskować z pracy z metodą naukową: jeśli przyjmiemy, że gra jest rozgrywana pod wodą lub że piłkę nożną można zastąpić dwoma papierowymi kubkami, wówczas będziemy bardzo blisko wyjaśnienia, jak Roberto Carlos zdołał tak podkręcić piłkę.

5 | MOŻLIWOŚCI WSPÓŁPRACY

Na naszej platformie iStage 3 GeoGebra [10] można znaleźć informacje na temat tego, jak uzyskać kopię naszych plików GeoGebra i jak z nich skorzystać. Proponujemy konkurs: uzyskajcie jak największy efekt Magnusa w doświadczeniu z latającymi papierowymi kubkami. Odpowiada to znalezieniu najwyższej wartości dla C_s – możliwie najbliższej 1. Możecie udostępnić innym swoje analizy, wyniki i modele [11].

ŹRÓDŁA:

[1] www.theguardian.com/football/2015/may/18/roberto-carloss-free-kick-against-france-recreated-sensible-soccer-style (08/03/2016)
[2] www.uefa.com/trainingground/skills/video/videoid%3D761187.html (08/03/2016)
[3] Oryginalne zdjęcie do **RYS. 1** pozyskano ze strony https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus_effect.svg (08/03/2016)
[4] The Science of Soccer; John Wesson. CRC press, 2002. ISBN 978-0750308137
[5] www.physlets.org/tracker
[6] iStage: Materiały dydaktyczne wykorzystujące technologie informacyjno-komunikacyjne [TIK] w nauczaniu przedmiotów ścisłych, rozdział „Od jazdy na rowerze do lotu w kosmos”, str. 43–64, www.science-on-stage.de/iStage1_downloads
[7] VidAnalysis app https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=en (08/03/2016)
[8] www.geogebra.org/
[9] Podobne doświadczenie zostało opisane przez Laurę Howes (Science in School, wydanie 35, 2016, www.scienceinschool.org/content/sports-spin).
[10] www.geogebra.org/science+on+stage
[11] www.science-on-stage.de/iStage3_materials
[12] https://processing.org

IMPRINT

TAKEN FROM
iStage 3 - Football in Science Teaching
available in Czech, English, French, German, Hungarian, Polish, Spanish, Swedish
www.science-on-stage.eu/istage3

PUBLISHED BY
Science on Stage Deutschland e.V.
Poststraße 4/5
10178 Berlin · Germany

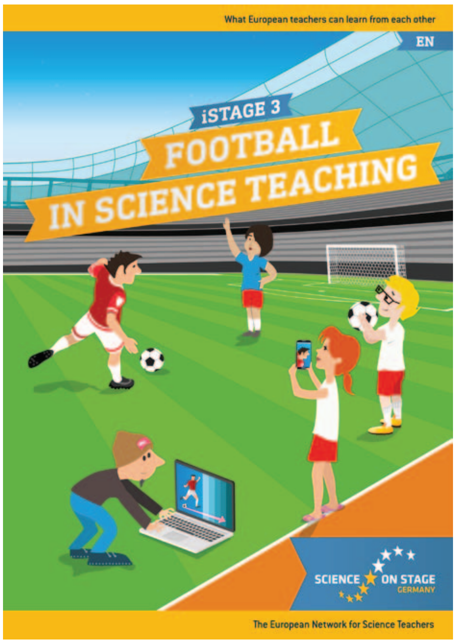
REVISION AND TRANSLATION
TransForm Gesellschaft für Sprachen- und Mediendienste mbH
www.transformcologne.de

CREDITS
The authors have checked all aspects of copyright for the images and texts used in this publication to the best of their knowledge.

DESIGN
WEBERSUPIRAN.berlin

ILLUSTRATION
Tricom Kommunikation und Verlag GmbH
www.tricom-agentur.de

PLEASE ORDER FROM
www.science-on-stage.de
info@science-on-stage.de



SCIENCE ON STAGE – THE EUROPEAN NETWORK FOR SCIENCE TEACHERS

... is a network of and for science, technology, engineering and mathematics (STEM) teachers of all school levels.
... provides a European platform for the exchange of teaching ideas.
... highlights the importance of science and technology in schools and among the public.

The main supporter of Science on Stage is the Federation of German Employers' Associations in the Metal and Electrical Engineering Industries (GESAMTMETALL) with its initiative think ING.

Join in - find your country on
WWW.SCIENCE-ON-STAGE.EU
www.facebook.com/scienceonstageeurope
www.twitter.com/ScienceOnStage

Subscribe for our newsletter:
www.science-on-stage.eu/newsletter