ANDERS FLORÉN · PHILIPPE JEANJACQUOT · DIONYSIS KONSTANTINOU · ANDREAS MEIER · CORINA TOMAOVÁ · ZBIGNIEW TRZMIEL

BLÁZNIVÁ FYZIKA

Magnusův jev, dynamika tekutin
fyzika, matematika
16–19 let

1 | SOUHRN

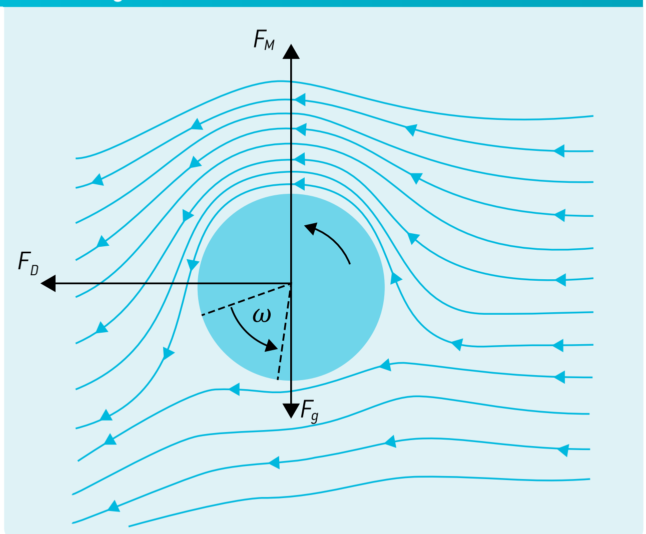
Otáčející se míč, který se pohybuje vzduchem, se kroutí v důsledku Magnusova jevu, což je síla působící kolmo na směr a osu rotace míče. Uvedeme zde několik praktických pokusů, simulací a metod pro výpočet trajektorie.

2 | PRVOTNÍ KONCEPCE

V červnu 1997 vsítil Roberto Carlos proslulý gól z volného kopu ze vzdálenosti 35 m, který dodnes udivuje diváky. [1] Jak se mohl míč takto chovat – nejprve letěl jedním směrem, aby se nakonec jakoby zázračně stočil k brance? Odpověď je, že se míč ve vzduchu otáčí a je vystaven Magnusovu jevu. Pokud se chcete podívat na úvod do volných kopů od samotného mistra Roberta, vysoce vám doporučujeme jeho video z domovské stránky UEFA Training Ground. [2] Pokud se chcete dozvědět více o Magnusovu jevu, pokračujte ve čtení.

Abychom mohli analyzovat trajektorii míče, musíme posoudit tři síly působící na míč: tíhovou sílu F_g, Magnusovu sílu F_M a sílu odporovou F_D.

OBR. 1 Síly [3]



Tíhová síla je jednoduše dána druhým Newtonovým zákonem, $F_g = mg$, kde m je hmotnost míče a g je tíhové zrychlení.

Magnusova síla F_M je výsledkem rozdílů v tlaku na protilehlých stranách míče. Změny tlaku lze popsat na základě Bernoulliho principu. Pro bod na povrchu pohybujícím se médiem rychlostí v platí, že celkový tlak p je roven okolnímu statickému tlaku p_0 plus dynamickému tlaku q (**ROV. 1**), kde ρ je hustota média, v našem případě hustota vzduchu. Když se ale otáčí míč nebo válec s poloměrem R (úhlovou rychlostí ω v radiánech za sekundu), je bod na povrchu na jedné straně míče vystaven vyššímu průtoku vzduchu $(v + \omega R)$ než protilehlý bod na druhé straně $(v - \omega R)$. Dosazením do **ROV. 1**. můžeme odvodit rozdíl tlaku $\Delta p = 2\rho\omega vR$.

$$p = q + p_0 = \frac{\rho v^2}{2} + p_0 \qquad \textbf{(ROV. 1)}$$

$$\Delta p = \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + p_0\right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + p_0\right)$$

$$= \frac{\rho\left((v + \omega R)^2 - (v - \omega R)^2\right)}{2} = 2\,\rho\omega vR$$

$$F_M = \Delta pA = (2\rho\omega vR)A$$

Pro válec: $F_M = 4\rho\omega vR^2h.$ **(ROV. 2)**

Pro kouli: $F_M = 2\rho\omega v\pi R^3.$ **(ROV. 3)**

Tlak působící na povrch bude F_M. Aniž bychom se příliš podrobně zabývali matematickou stránkou tohoto jevu, zaměříme se na síly působící kolmo ke směru proudění tekutin. Každá síla působící jiným směrem než kolmo na proudění bude z důvodu symetrie vyrušena jinou silou působící opačným směrem. Podíváme se tedy pouze na účinný průřez A předmětu. U míče bude A jednoduše kruh o poloměru R (použitý v **ROV. 3**); u válce bude A obdélník o výšce $2R$ a šířce h (použitý v **ROV. 2**). Z hlediska vektorů je $\vec{F}_M$ přímo úměrná vektorovému součinu směrové rychlosti a úhlové rychlosti.

A nakonec musíme vyhodnotit sílu odporovou F_D. Odpor je složitý, protože proudění vzduchu může být laminární nebo turbulentní, což do značné míry závisí na tvaru předmětu a povaze tekutiny, kterou se pohybuje. Pro naše pokusy stačí předpokládat, že proudění je laminární (jako na **OBR. 1**), a použít standardní rovnici odporu, kde síla směřuje opačným směrem vůči v a v přímé úměrnosti s rychlostí: $F_D = \beta v$. β je konstanta, která závisí na vlastnostech tekutiny a rozměrech předmětu; pro fotbalový míč ve vzduchu je $\beta = 0{,}142\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ [4].

3 | CO STUDENTI DĚLAJÍ

Zde uvádíme tři různé možnosti, jak ukázat Magnusův jev. Všechny tyto pokusy lze provádět jako jednoduché ukázky, ale můžete je také zaznamenat a pomocí našich modelů trajektorie analyzovat. V tom případě dbejte na to, abyste záznam vyhotovili pomocí stacionární kamery ve stejné výšce jako předměty a kolmo na trajektorii, alespoň ve vzdálenosti několika metrů, abyste minimalizovali úhlové zkreslení. Film pak lze analyzovat pomocí programu pro sledování pohybu. Doporučujeme Tracker [5]. Podrobný návod pro použití aplikace Tracker najdete v naší první příručce iStage [6]. K dispozici je také vynikající aplikace nazvaná VidAnalysis [7], která zaznamená trajektorii a provede analýzu přímo na zařízení se systémem Android (**OBR. 2C**). Hodnoty je také možné exportovat pro další analýzu; v tomto případě používáme volně dostupný program GeoGebra [8].

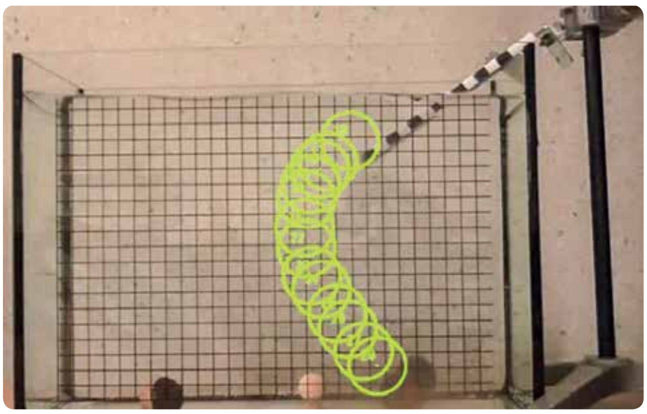
OBR. 2 Sklon válce

3 | 1 Pokusy s válcem

Pomocí papírů formátu A4 nebo A3 a lepidla vytvořte různé válce. Připravte nakloněnou rovinu a pouštějte válce dolů, abyste dosáhli volného pádu s rotací **(OBR. 2A)**.

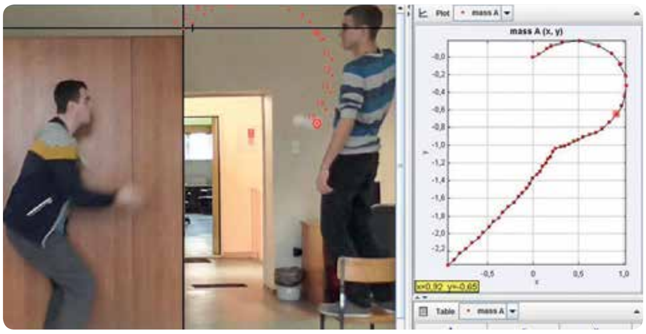
Studenti mohou zkoumat, co se stane, když změní sklon roviny či poloměr nebo výšku válce. Experimentálně mohou studenti určit parametry, při kterých je viditelně dosaženo většího účinku, a dát je do souvislosti s **ROV. 2**, popř. mohou jít ještě dále, extrahovat hodnoty a přikročit k jejich analýze (model II) podle níže uvedeného popisu.

Magnusův jev ve vodě **(OBR. 3)** je díky vyšší hustotě média ještě působivější. Válec musí mít vyšší hustotu než voda a drsný povrch pro vyšší tření. Použili jsme pevnou teflonovou tyč nalepenou na povrch. Pro úpravu hmotnosti válce můžete na jeho konce nalepit mince.



OBR. 3 Magnusův jev ve vodě

Ještě efektnější, ale složitější konfigurace dosáhnete tehdy, pokud k sobě spodní stranou přilepíte nebo páskou upevníte dva polystyrénové kelímky, abyste z nich vytvořili válec s pasem uprostřed.[9] Okolo středu válce omotejte provázek a válec vyhoďte do vzduchu tak, že za provázek zatáhnete (**OBR. 4**; na našich stránkách pro aplikaci GeoGebra je k dispozici také odkaz na film[10]). Vyžaduje to určitou praxi, ale výsledek je mimořádně působivý. Ve srovnání s ostatními pokusy s válcem je tento pokus hůře reprodukovatelný, protože trajektorie závisí na úhlu a na tom, jak za provázek zatáhnete. Přesto můžete individuálně jednotlivé trajektorie analyzovat. Na **OBR. 4** přejdou létající kelímky do kruhového pohybu. Je-li Magnusův jev výrazně větší než tíhová síla, chová se F_M jako dostředivá síla. Tento užitečný předpoklad bude použit později při analýze údajů.



OBR. 4 Létající kelímky

3 | 2 Analýza údajů

Pro analýzu trajektorií jsme vytvořili různé matematické modely. Tyto modely jsou přímo dostupné online z našich stránek iStage 3 GeoGebra[10]. Důrazně vám doporučujeme, abyste si je před přečtením tohoto textu otevřeli. Poběží přímo ve vašem prohlížeči, stačí jen na odkaz kliknout.

Ve všech výpočtech předpokládáme, že rotace je během letu konstantní. Následně vytvoříme dva zjednodušené modely na základě různých předpokladů:

Model I: Stejně jako u otazníkové trajektorie létajících papírových kelímků **(OBR. 4)** se bude F_M chovat jako dostředivá síla a vypočítaná trajektorie předmětu bude mít podobu kruhu o poloměru r. Tento předpoklad je odůvodněný i při pokutovém kopu, kdy celková rychlost míče zůstává zhruba stejná. Určitá část energie je ztracena v důsledku turbulencí, takže pro popis této ztráty musíme zavést konstantu C_s.

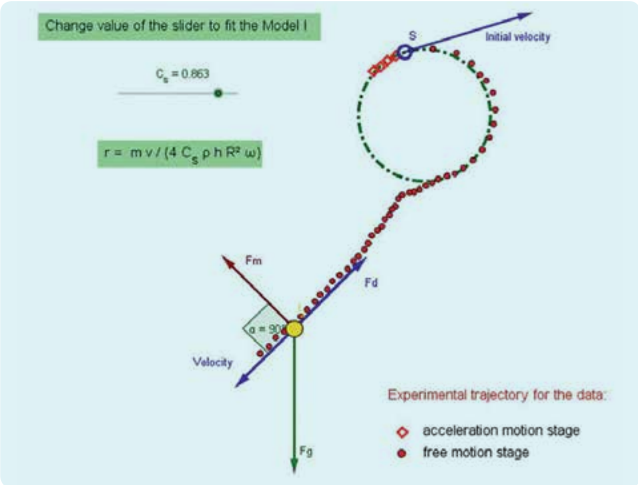
Pak dostaneme:

$$F_M = C_s 2\rho\omega v R A = \frac{mv^2}{r}.$$

Pro kouli: $r = \dfrac{mv}{2C_s \pi \rho \omega R^3}$. **(ROV. 4)**

Pro válec: $r = \dfrac{mv}{4C_s \rho \omega h R^2}$. **(ROV. 5)**

Dráhu můžete sledovat na našem modelu GeoGebra na **OBR. 4** (létající kelímky) a změnit střed kruhu a C_s. Pohrajte si s parametry, abyste získali co nejlepší řešení; model spočítá *r* z **ROV. 5**. Pro naše údaje je nejlepší řešení $C_s = 0{,}86$.



OBR. 5 Analýza létajících kelímků

Model II: Pro zjednodušení výpočtů při pokusu s papírovým válcem **(OBR. 2)** mohou studenti předpokládat, že Magnusův jev působí především kolmo k počátečnímu směru pohybu a že válce dosáhly při pádu maximální rychlosti. S těmito předpoklady se F_D a F_g ruší a Magnusův jev lze považovat za zrychlení a ve směru y, takže vypočítaná trajektorie bude mít tvar parabolické křivky:

$$y = \frac{a}{2v^2}x^2 \implies y = C_s \frac{\rho \omega R A}{mv} x^2 .$$

Pro kouli: $y = C_s \dfrac{\pi \rho \omega R^3}{mv} x^2$. **(ROV. 6)**

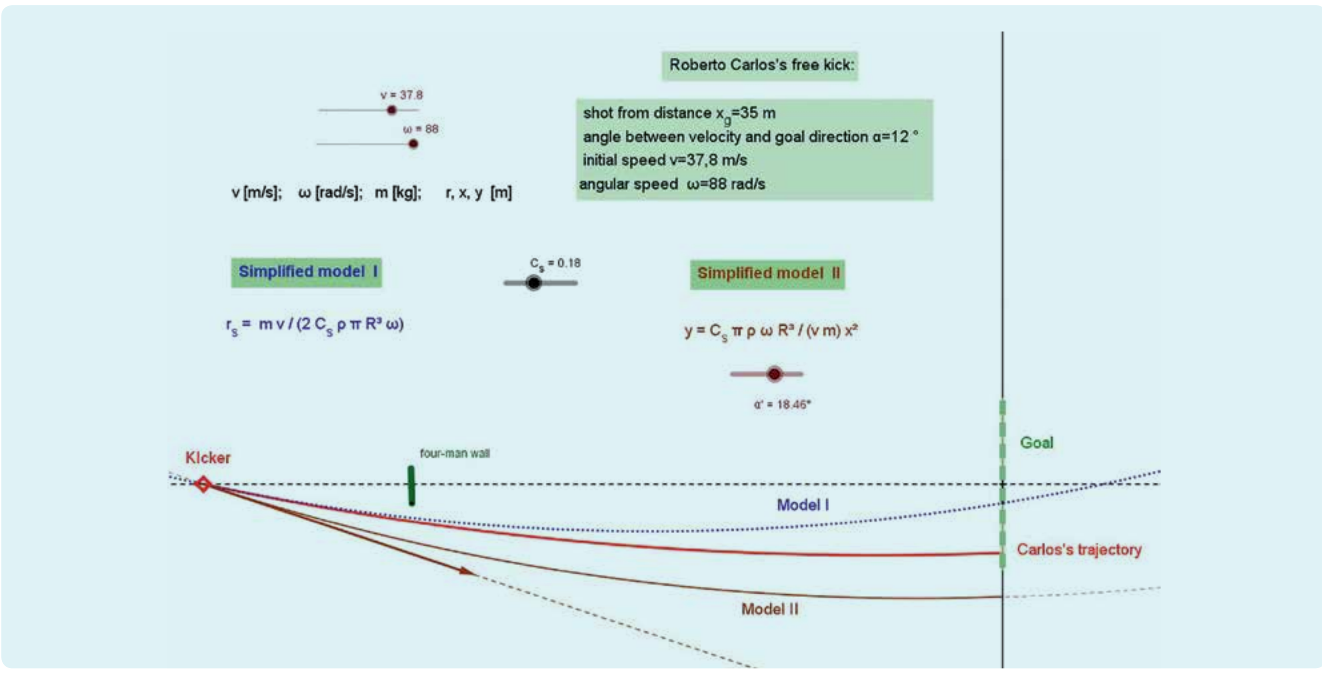
Pro válec: $y = C_s \dfrac{2 \rho \omega h R^2}{mv} x^2$. **(ROV. 7)**

Toto je zjednodušení, ale dostaneme tak podobnou hodnotu C_s jako ve druhém modelu.

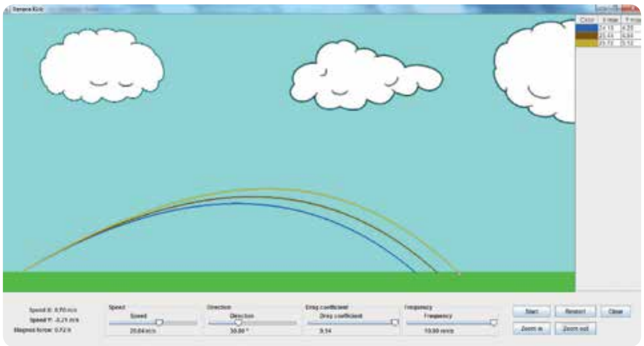
Na našich stránkách pro aplikaci GeoGebra **(OBR. 6)** jsme připravili model proslulého volného kopu Roberta Carlose. Můžete si pohrát téměř se všemi parametry, abyste změnili výchozí situaci (vzdálenost, úhel, velikost branky, C_s, rychlost, rotace, postavení čtyřčlenné zdi atd.). Analýza ukáže vypočítanou trajektorii obou modelů I a II, tentokrát s využitím **ROV. 4** a **ROV. 6**, protože v tomto případě se zabýváme míčem, ne válcem. Vyzvěte své studenty, aby našli nejlepší hodnoty pro danou konfiguraci, popřípadě je požádejte, aby nalezli podmínky, za kterých modely vedou k různým trajektoriím, a zeptejte se je na vysvětlení. (Zjistíte, že modely se liší v případě, že dáte míči velmi nízkou rychlost a vysokou rotaci).

3 | 3 Simulace

Simulace 2D: Po několika praktických pokusech mohou studenti Magnusův jev nasimulovat. Stáhněte si program Java [11]. V této simulaci mohou studenti měnit počáteční rychlost, úhel, koeficient odporu a úhlovou frekvenci. Směr rotace a síly působící na míč odpovídají **OBR. 1**. Na **OBR. 7** znázorňujeme tři příklady trajektorií pod úhlem 30° s frekvencí 0, 5 a 10 $\frac{\text{ot.}}{\text{s}}$. Vidíte,



OBR. 6 Analýza volného kopu

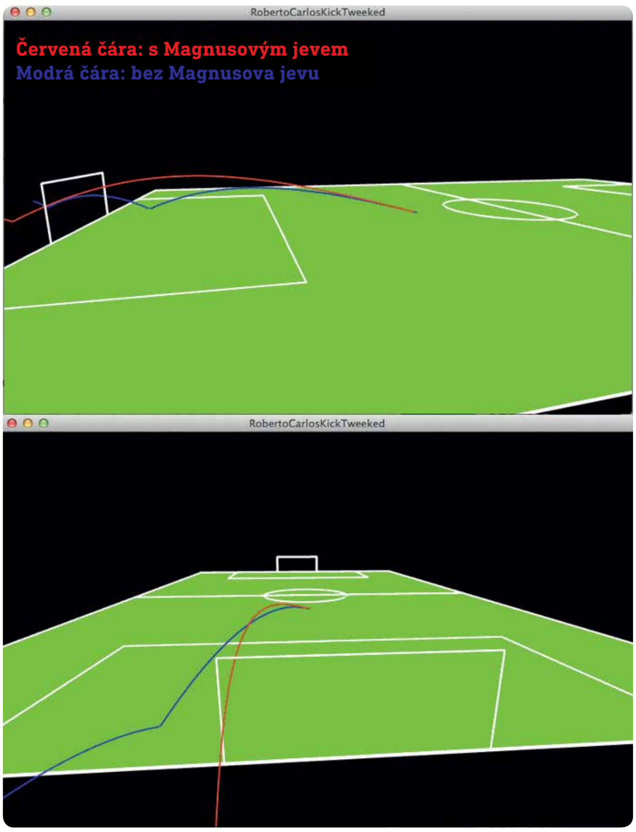


OBR. 7 2D simulace (Cristian Militaru)

že se hodnoty x_{max} a y_{max} zvyšují, pokud se zvyšuje i frekvence.

Simulace 3D: Znovu jsme stanovili trajektorii volného kopu Roberta Carlose (**OBR. 8**). Nyní se o to můžete pokusit sami, když si stáhnete příslušný program Java [11]. Později můžete vyzkoušet jinou verzi [11] bez kopu, kde můžete parametry libovolně měnit a sledovat, jaký to bude mít vliv na trajektorii.

V 3D modelu je vše mnohem složitější. Ve dvojrozměrném modelu může mít míč pouze horní nebo spodní rotaci, takže trajektorie a Magnusova síla budou vždy působit ve stejné rovině. V třírozměrném modelu Magnusův jev zakroutí trajektorii míče, ale moment hybnosti rotace bude vždy zachován, protože míč se chová jako gyroskop. Úhel mezi v a ω se tedy bude v různých bodech trajektorie lišit, což způsobí složitější trajektorii míče. Na rozdíl od výpočtů v aplikaci GeoGebra tento program jednoduše číselně spočítá všechny síly na každém snímku na základě hodnot z předchozího snímku. Program je napsán v jazyce Processing [12], což je zjednodušená verze Java.



OBR. 8 3D simulace

4 | ZÁVĚR

Na fotbalovém hřišti je trajektorie míče velmi komplexní a závisí na řadě faktorů. Pro její studium ve třídě ji studenti musejí rozložit do jednotlivých pochopitelných složek pomocí modelů a zjednodušení. Tyto pokusy, modely a simulace nám umožňují zjistit, co můžeme usuzovat z práce s vědeckou metodou: Pokud bychom předpokládali, že se zápas hraje pod vodou nebo že lze fotbalový míč nahradit dvěma papírovými kelímky, byli bychom velmi blízko k vysvětlení toho, jak se Robertu Carlosovi podařilo dráhu míče tak zatočit.

5 | MOŽNOSTI SPOLUPRÁCE

Na naší platformě iStage 3 GeoGebra [10] najdete informace o tom, jak získáte kopii našich GeoGebra souborů a jak je používat. Navrhujeme úkol: zjistěte nejvyšší možný Magnusův jev pro pokus s létajícími papírovými kelímky. To odpovídá zjištění nejvyšší hodnoty C_s, co nejblíže hodnotě 1. Svou analýzu, výsledky a modely můžete sdílet [11].

REFERENCE:

[1] www.theguardian.com/football/2015/may/18/roberto-carloss-free-kick-against-france-recreated-sensible-soccer-style (08.03.2016)

[2] www.uefa.com/traiingground/skills/video/videoid%3D761187.html (08.03.2016)

[3] Původní fotografie pro **OBR. 1** byla získána z https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnus_effect.svg (08.03.2016)

[4] The Science of Soccer (Fotbal jako věda); John Wesson. CRC press, 2002. ISBN 978-0750308137

[5] www.physlets.org/tracker

[6] iStage: Výukové materiály pro informatiku v přírodních vědách, oddíl „Od kola do vesmíru“, s. 45-52; www.science-on-stage.de/iStage1_downloads

[7] Aplikace VidAnalysis https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vidanalysis.free&hl=en (08.03.2016)

[8] www.geogebra.org/

[9] Podobný pokus popsala Laura Howesová (Science in School (Věda ve škole), číslo 35, 2016, www.scienceinschool.org/content/sports-spin).

[10] www.geogebra.org/science+on+stage

[11] www.science-on-stage.de/iStage3_materials

[12] https://processing.org

IMPRINT

TAKEN FROM

iStage 3 - Football in Science Teaching
available in Czech, English, French, German,
Hungarian, Polish, Spanish, Swedish
www.science-on-stage.eu/istage3

PUBLISHED BY

Science on Stage Deutschland e.V.
Poststraße 4/5
10178 Berlin · Germany

REVISION AND TRANSLATION

TransForm Gesellschaft für Sprachen- und Mediendienste mbH
www.transformcologne.de

CREDITS

The authors have checked all aspects of copyright for the images and texts used in this publication to the best of their knowledge.

DESIGN

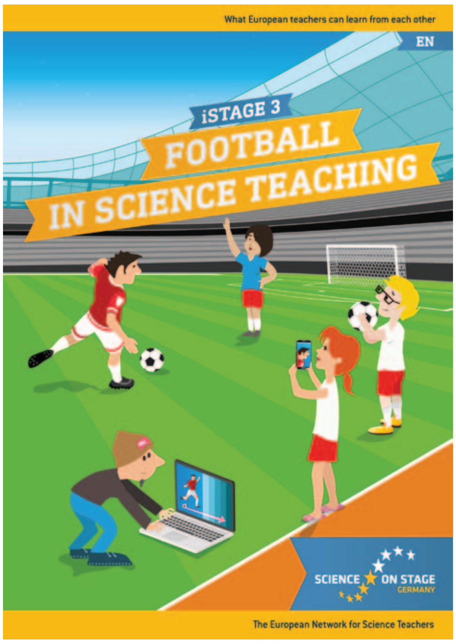
WEBERSUPIRAN.berlin

ILLUSTRATION

Tricom Kommunikation und Verlag GmbH
www.tricom-agentur.de

PLEASE ORDER FROM

www.science-on-stage.de
info@science-on-stage.de



SCIENCE ON STAGE – THE EUROPEAN NETWORK FOR SCIENCE TEACHERS

... is a network of and for science, technology, engineering and mathematics (STEM) teachers of all school levels.

... provides a European platform for the exchange of teaching ideas.

... highlights the importance of science and technology in schools and among the public.

The main supporter of Science on Stage is the Federation of German Employers' Associations in the Metal and Electrical Engineering Industries (GESAMTMETALL) with its initiative think ING.

Join in - find your country on

WWW.SCIENCE-ON-STAGE.EU

www.facebook.com/scienceonstageeurope
www.twitter.com/ScienceOnStage

Subscribe for our newsletter:

www.science-on-stage.eu/newsletter

SCIENCE ON STAGE GERMANY

MAIN SUPPORTER OF SCIENCE ON STAGE GERMANY
think ING.
Die Initiative für Ingenieurnachwuchs

Proudly supported by
SAP®